BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2013

RİYAZİYYAT

УДК 517.926

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫХОДЯЩИХ ЗА РАМКИ КЛАССА ПАРАБОЛИЧНОСТИ

Ю.А.МАМЕДОВ, В.Ю.МАСТАЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет
vagiftrk1.@rambler.ru

Исследуется разрешимость смешанной задачи для одного класса неклассических уравнений, могущих перейти с параболического типа на Шредингеровый и даже на антипараболический. Характерным свойством таких уравнений является то, что для уравнений соответствующих спектральных задач аргументы корней характеристического полинома по Дж. Биркгофу не постоянны.

Ключевые слова: параболический и антипараболический тип, спектральная задача, смешанная задача, аргументы корней, характеристический полином по Дж.Биркгофу

В статье исследовано существование решения смешанной задачи

$$(x+b)^2 \frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = (2\alpha t + \beta) \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2}, \qquad 0 < t \le T,\ 0 \le x \le 1 \tag{1}$$

$$U(0,x) = \varphi(x),\ \ 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$U(t,0) = U(t,1) = 0,\ \ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, $b = b_1 + ib_2$ - комплексные числа, $\varphi(x)$-заданная, а $U(t,x)$- искомая функции.

Окончательными условиями разрешимости будут

1^0. $b_1 > 0,\ b_2 > 0, -\dfrac{\beta_1}{\alpha_1} \in (0,\mathrm{T}),\ \alpha_1 < 0$;

2^0. $\mathrm{Re}(1+b)^2 + \omega(T)\,\mathrm{Im}(1+b)^2 < 0,\ \ \mathrm{Re}\, b^2 + \omega(\mathrm{T})\,\mathrm{Im}\, b^2 > 0$ если $\mathrm{Im}\,\overline{\alpha}\beta < 0$,

где $\omega(t) = (\alpha_1 t + \beta_1)^{-1}(\alpha_2 t + \beta_2)$, $\overline{\alpha} = \alpha_1 - i\alpha_2$;

$3^0 .\ \varphi(x) \in C^2[0,1],\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

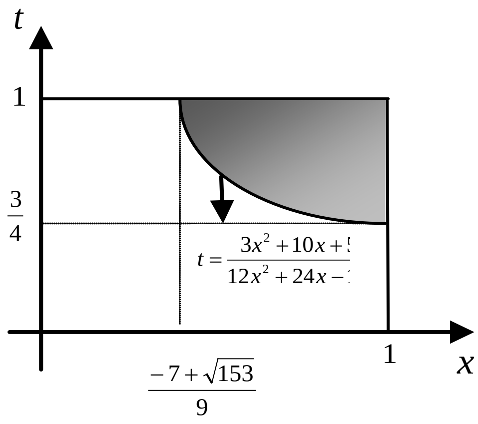
Нетрудно показать, что при выполнении условий $b_1 > 0,\ b_2 > 0, -\frac{\beta_1}{2\alpha_1} \in (0,\mathrm{T}),\ \alpha_1 < 0$ уравнение (1) параболично по И.Г.Петровскому только тогда, когда выполнялось следующее неравенство

$$\operatorname{Re} b^2 + \omega(0) \operatorname{Im} b^2 > 0,\ \ \operatorname{Re}(1+b)^2 + \omega(2T) \operatorname{Im}(1+b)^2 < 0$$
$$\text{если} \quad \operatorname{Im} \overline{\alpha} \beta < 0 \qquad (4)$$

Например, для уравнения

$$\left(x+2+i\right)^2 \frac{\partial U}{\partial t} = \left(2(-1+i)\,t + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}i\right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (5)$$

условия 1^0 и 2^0 выполняются, но из-за нарушения второго из неравенств (4) оно не параболично в $\left[0, T\right] \times \left[0, 1\right]$ в смысле И.Г.Петровского. Легко понять, что это уравнение не параболично даже и по Г.Е.Шилову. Боле того, в части рассматриваемого прямоугольника оно антипараболично (например, при $T = 1$ в области $(12(x^2 + 2\mathrm{x} - 1))^{-1}(3x^2 + 10x + 5) < t \le 1$, $0 \le x \le \frac{-7+\sqrt{153}}{9}$; см. заштрихованную область на рисунке).



Спектральная задача, соответствующая (1) –(3) имеет вид:

$$y'' - \lambda^2 (x+b)^2 y = -(x+b)^2 \varphi(x) \qquad (6)$$
$$y(0) = y(1) = 0 \qquad (7)$$

Она также специфична [1], [2] в связи с тем, что аргументы корней $\pm\left(x+b\right)$ характеристического уравнения по Биркгофу, не постоянны в $\left[0, 1\right]$.

Функция Грина $G(x,\xi,\lambda)$ задачи (6), (7) аналитична всюду на комплексной λ плоскости, за исключением счетного множества значений $\lambda = \lambda_k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, которые являются ее полюсами и, для которых справедливо асимптотическое представление [3]:

$$\lambda_k = \frac{2k\pi\, i}{1+2b} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad (|k| \to \infty). \tag{8}$$

Пусть

$$S_i = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda b \cdot \operatorname{Re}\lambda(1+b) \le 0,\ (-1)^i \operatorname{Re}\lambda > 0\}\ (i = 1,2),$$
$$S_i = \{\lambda : (-1)^i \operatorname{Re}\lambda b < 0,\ (-1)^i \operatorname{Re}\lambda(1+b) < 0\}\ (i = 3,4),$$
$$\chi(\lambda) = -(\operatorname{Re}\lambda)^{-1} \operatorname{Re}\lambda b\ \ (\lambda \in S_i,\ i = 1,2).$$

Очевидно, что $0 \le \chi(\lambda) \le 1$, при $\lambda \in S_i\ \ (i = 1,2)$.

Из асимптотического представления (8) видно, что далекие полюсы λ_k лежат в секторах $S_i\ \ (i = 1,2)$. В $S_i\ \ (i = 3,4)$ же могут попасть лишь конечное число их.

В [4], [5] получены следующие оценки для производных функции Грина:

$$\left|\frac{\partial^k G(x,\xi,\lambda)}{\partial x^k}\right| \le c|\lambda|^{k-1}, \quad k = 0,1,2;\ \lambda \in S_3 \cup S_4,\ |\lambda| > R, \tag{9}$$

$$\left|\frac{\partial^k G(x,\xi,\lambda)}{\partial x^k}\right| \le ce^{(-1)^i \chi_0{}^2(\lambda)\operatorname{Re}\lambda}, \quad k = 0,1,2;\ \lambda \in S_i,\ |\lambda| > R,\ (i = 1,2), \tag{10}$$

которые справедливы вне δ-окрестностей полюсов, где R - достаточно большое, δ - достаточно малое положительные числа, $\chi_0(\lambda) = \min[\chi(\lambda), 1-\chi(\lambda)]$.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия* $1^0, 2^0$ *и* 3^0. *Тогда задача (1)-(3) имеет классическое решение* $U(t,x) \in C^{1,2}((0,T] \times [0,1]) \cap C([0,T] \times [0,1])$, *представимое формулой (при* $t > 0$*)*

$$U(t,x) = \frac{1}{\pi\, i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda^2 t(\alpha t+\beta)} d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)(\xi + b)^2 \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{11}$$

где

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{3} \Gamma_j,$$
$$\Gamma_j = \{\lambda : \lambda = r(1+ip_j),\ r \ge R\}\ \ (j = 1,2),$$
$$\Gamma_3 = \{\lambda : \lambda = R(1+i\eta),\ p_2 - \pi \le \eta \le p_1\},$$

$$p_j = K_1(t_j) + (-1)^{j+1}\delta, \quad K_j(t) = -\omega(t) + (-1)^{j+1}\sqrt{\omega^2(t)+1},\ (j = 1,2), \tag{12}$$

$t_1 = 0,\ t_2 = \mathrm{T}$, *если* $\operatorname{Im}\overline{\alpha}\beta < 0$, R *- достаточно большое, а* δ *- достаточно малое положительные числа.*

Сначала докажем некоторые леммы:

Лемма 1. *Пусть* $\alpha_1 < 0,\ -\dfrac{\beta_1}{\alpha_1} \in (0,T)$, $\operatorname{Im}\overline{\alpha}\beta < 0$. *Тогда при* $t \in [0,\ T]$, *на лучах* $\lambda = r(1 + ip_j)$ $(r \ge 0,\ j = 1,2)$ *справедлива оценка вида:*

$$\operatorname{Re}\lambda^2(\alpha t + \beta) \le -\varepsilon|\lambda|^2, \tag{13}$$

где $\varepsilon > 0$.

Доказательство: Примем следующие обозначения:

$$q_1 = -\alpha_2\alpha_1^{-1} + \sqrt{\left(\alpha_2\alpha_1^{-1}\right)^2 + 1},\ \ q_2 = -\alpha_2\alpha_1^{-1} - \sqrt{\left(\alpha_2\alpha_1^{-1}\right)^2 + 1},$$

$$\Omega_1 = \{\lambda:\ \arg(1 + iq_1) \le \arg\lambda \le \pi + \arg(1 + iq_2)\},$$
$$\Omega_2 = \{\lambda:\ \arg(1 + iq_1) - \pi \le \arg\lambda \le \arg(1 + iq_2)\},$$
$$\Omega_3 = \{\lambda:\ \arg(1 + iq_2) - \pi \le \arg\lambda \le \arg(1 + iq_1) - \pi\},$$
$$\Omega_4 = \{\lambda:\ \arg(1 + iq_2) \le \arg\lambda \le \arg(1 + iq_1)\},$$
$$A_1 = \{\lambda:\ \arg(1 + iq_1) \le \arg\lambda \le \arg(1 + ip_2)\},$$
$$A_2 = \{\lambda:\ -\pi + \arg(1 + iq_1) \le \arg\lambda \le -\pi + \arg(1 + ip_2)\},$$
$$A_3 = \{\lambda:\ \arg(1 + ip_1) \le \arg\lambda \le \arg(1 + iq_1)\},$$
$$A_4 = \{\lambda:\ -\pi + \arg(1 + ip_1) \le \arg\lambda \le -\pi + \arg(1 + iq_1)\}.$$

Из представлений функции

$$\operatorname{Re}\lambda^2(\alpha t + \beta) = \operatorname{Re}\lambda^2 \cdot \operatorname{Re}(\alpha t + \beta) - \operatorname{Im}\lambda^2 \cdot \operatorname{Im}(\alpha t + \beta)$$

видно, что если $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$, то функция $\operatorname{Re}\lambda^2(\alpha t + \beta)$ является возрастающей и неравенство $\operatorname{Re}\lambda^2(\alpha t + \beta) < 0$ выполняется в секторе A_i $(i = 1,2)$ при всех $t \in [0,\ T]$. Учитывая очевидное равенство

$$\operatorname{Re}\lambda^2(\alpha t + \beta) \le \operatorname{Re}\lambda^2(\alpha T + \beta) = -(\alpha_1 T + \beta_1) \cdot \prod_{m=1}^{2}\left[\operatorname{Im}\lambda - K_m(\mathrm{T})\operatorname{Re}\lambda\right]$$

при $\lambda = r(1 + ip_2)$ получаем:

$$\operatorname{Re}\lambda^2(\alpha T + \beta) \le -(\alpha_1 T + \beta_1) r^2 \prod_{m=1}^{2}\left[p_2 - K_m(T)\right] \le -(\alpha_1 T + \beta_1) r^2 \prod_{m=1}^{2}\left[K_1(T) - \delta - K_m(T)\right] \tag{14}$$

Но из условия леммы видно, что $\alpha_1 T + \beta_1 < 0$. Тогда

$$K_1(T) - \delta - K_1(T) = -\delta,$$
$$K_1(T) - \delta - K_2(T) \ge \delta\ . \tag{15}$$

С учетом (15), из (14) получаем:

$$\operatorname{Re}\lambda^2(\alpha t + \beta) \le -\delta_1\delta^2 r^2 \le -\varepsilon \cdot |\lambda|^2\ . \tag{16}$$

А если $\lambda \in \Omega_4 \cup \Omega_3$, то нетрудно проверить, что функция $\operatorname{Re}\lambda^2(\alpha t+\beta)$ является убывающей и неравенство $\operatorname{Re}\lambda^2(\alpha t+\beta)<0$ выполняется в секторе $A_i\ (i=3,4)$ при всех $t\in[0,T]$. Тогда с учетом неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda^2(\alpha t+\beta)\le -\beta_1\cdot r^2\cdot\prod_{m=1}^{2}\left[p_1-K_m(0)\right]=-\beta_1\cdot r^2\cdot\prod_{m=1}^{2}\left[K_1(0)+\delta-K_m(0)\right]$$

и $\alpha_1 T+\beta_1\ge\delta_1$ при $\lambda=r(1+ip_1)$ также получаем оценку вида (16). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha_1<0,\ -\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\in(0,T)$, $\operatorname{Im}\overline{\alpha}\beta<0$. *Тогда при* $t\in[0,T]$ *и всех* λ *из секторов*

$$\Sigma_1=\{\lambda:\ \arg(1+ip_1)\le\arg\lambda\le\arg(1+ip_2)\},$$
$$\Sigma_2=\{\lambda:\ -\pi+\arg(1+ip_1)\le\arg\lambda\le-\pi+\arg(1+ip_2)\}$$

справедлива оценка вида (13).

Доказательство. Обозначим $\rho=|\lambda|$, $\theta=\arg\lambda$, $\theta_j=\arg(1+ip_j)$. Тогда

$$\operatorname{Re}\lambda^2(\alpha t+\beta)=\rho^2 w(\theta,t),$$

где $w(\theta,t)=\operatorname{Re}e^{2i\theta}(\alpha t+\beta)$ и согласно лемме 1, существует $\varepsilon>0$ такое, что

$$w(\theta_j,t)\le-\varepsilon\quad (j=1,\,2),$$

при $t\in[0,T]$. Очевидно, что

$$w(\theta_2-\pi,t)=w(\theta_2,t)\le-\varepsilon\ ,$$
$$w(\theta_1-\pi,t)=w(\theta_1,t)\le-\varepsilon$$

и поэтому в этом случае мы должны доказать, что внутри сегментов $[\theta_1,\theta_2]$ и $[\theta_1-\pi,\theta_2-\pi]$ не существуют нули функции $w(\theta,t)$. Но поскольку эта функция на концах этих отрезков отрицательна, то она внутри каждого из них может иметь либо кратный нуль, либо не менее двух различных нулей.

Если

$$w(\theta_0,t)=\frac{dw(\theta_0,t)}{d\theta_0}=0,$$

при $\theta_0\in(\theta_2,\theta_1)$ (или при $\theta_0\in(\theta_1-\pi,\theta_2-\pi)$), то имеем

$$\operatorname{Re}e^{2i\theta_0}(\alpha t+\beta)=0,\quad \operatorname{Re}2ie^{2i\theta_0}(\alpha t+\beta)=-2\operatorname{Im}e^{2i\theta_0}(\alpha t+\beta)=0,$$

тем самым

$$e^{2i\theta_0}(\alpha t+\beta)=0,$$

что невозможно в силу условия $\alpha_1<0$, $\operatorname{Im}\overline{\alpha}\beta<0$.

Рассмотрим второй случай. Пусть

$$w(\theta_0', t) = w(\theta_0'', t) = 0, \quad (\theta_0' < \theta_0''),$$

где $\theta_0', \theta_0'' \in (\theta_1, \theta_2)$ (или $\theta_0', \theta_0'' \in (\theta_1 - \pi, \theta_2 - \pi)$). Легко видеть, что функция $w(\theta, t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + 4w = 0$$

и следовательно, расстояние между двумя соседними нулями любого решения этого уравнения равно $\frac{\pi}{2}$. Тогда ясно, что

$$\frac{\pi}{2} \le \theta_0'' - \theta_0' < \theta_2 - \theta_1,$$

откуда имеем

$$\theta_2 - \theta_1 > \frac{\pi}{2}. \tag{17}$$

С другой стороны $\theta_2 - \theta_1$ является углом между векторами $\{1, p_1\}$ и $\{1, p_2\}$, скалярное произведение которых равно

$$f(\delta) = 1 + p_1 p_2 = 1 + [K_1(T) + \delta] \cdot [K_1(0) - \delta].$$

Функция $f(\delta)$ возрастающая:

$$f'(\delta) = -2\delta + K_1(0) - K_1(T) > 0.$$

Поэтому имеем

$$f(\delta) > f(0) = 1 + K_1(T) K_1(0) > 0 \tag{18}$$

при $\delta > 0$.

Положительность скалярного произведения $f(\delta)$ означает, что угол $\theta_2 - \theta_1$ (при $\delta > 0$) является острым, что противоречит неравенству (1.86). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* $1^0, 2^0$. *Тогда числа* δ *и* R *(в определении контура* Γ*) можно выбрать такими, чтобы было*

$$\Gamma \cap S_j = \varnothing \quad (j = 1, 2)$$

и область

$$R_\delta = \{\lambda : \quad \lambda = r(1 + i\eta), \; r \ge R, \; p_2 - \pi \le \eta \le p_1\}$$

не содержала полюсов λ_k *функции Грина* $G(x, \xi, \lambda)$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству соответствующей леммы в работе [5].

Далее считая, что числа R и δ (в определении контура Γ) выбраны по требованиям леммы 3 и опираясь на леммы 1-3, доказательство теоремы завершается простыми рассуждениями, аналогичными проведенным в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла. М.: Наука, 1964, 462 с.
2. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1984, 352 с.
3. Мамедов Ю.А. О задаче Штурма-Лиувилля в случае комплексной плотности. Вестник БГУ, Баку, 1998, №1, с.133-142.
4. Мамедов Ю.А, Масталиев В.Ю. О росте функции Грина задачи Штурма-Лиувилля с комплекснозначной плотностью при параметре. Труды ИММ. АН Азербайджана, т. XYII, Изд. Элм, 2002, с.122-127.
5. Мамедов Ю.А., Масталиев В.Ю. О разрешимости смешанных задач для одного нового класса уравнений, могущих перейти с параболического типа на антипараболический. Вестник БГУ, Баку, 2002, №4, с.93-103.
6. Mastaliyev V.Yu. On solvability of mixed problem for some equations not involved by standard cllassifications. Proccedings of IMM of NASA. v. XVIII (XXVI), Baku, 2003, p. 91-96.

PARABOLİKLİK SİNİFİNDƏN KƏNARA ÇIXAN BİR SİNİF TƏNLİKLƏR ÜÇÜN QOYULMUŞ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN HƏLLOLUNANLIĞI

Y.Ə.MƏMMƏDOV, V.Y.MƏSTƏLİYEV

XÜLASƏ

Tipini palaboliklikdən Şredinger tipinə və hətta antiparabolik tipə dəyişən bir sinif qeyri-klassik tənliklər üçün qoyulmuş qarışıq məsələnin həllolunanlığı tədqiq olunur. Belə tənliklərin xarakterik xüsusiyyəti odur ki, spektral məsələnin tənliyinə uyğun Birkhof mənada xarakteristik tənliyin köklərinin arqumentləri sabit deyil.

Açar sözlər: parabolik və antiparabolik tip tənliklər, spektral məsələ, qarışıq məsələ, köklərin arqumentləri, Brikhof mənada xarakteristik tənlik

SOLVABILITY OF THE MIXED PROBLEM THAT IS USED FOR SOME KIND OF EQUATIONS OUT OF PARABOLIC TYPE

Yu.A.MAMMADOV, V.Yu.MASTALIYEV

SUMMARY

In this research the solvability of the mixed problem for a class of non-classic equations is investigated which changes its type from parabolic to Shredinger and even antiparabolic. One of the main features of these equations is that the arguments of Birkhoff characteristic equation are not constant appropriate to the spectral problem equation.

Key words: the equation of parabolic and antiparabolic types, spectral problem, mixed problem, the roots of arguments, Birkhoff characteristic equation

Поступило в редакцию: 29.03.2013 г.
Подписано к печати: 17.10.2013 г.